

КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА НЕВПОРЯДКОВАНА МОДЕЛЬ КРОНІГА–ПЕННІ

О. Возняк, В. М. Ткачук

*Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005*

(Отримано 26 листопада 2002 р.; в остаточному вигляді — 15 липня 2003 р.)

Із використанням методу суперсиметрії побудовано одновимірні неупорядковані квазіточні розв'язувані потенціали Кроніга–Пенні з одним та двома відомими станами. Отримані власні хвильові функції належать до протяжних станів частинки в цих потенціалах.

Ключові слова: суперсиметрія, неупорядковані квазіточні розв'язувані потенціали, модель Кроніга–Пенні.

PACS number(s): 03.65.Ge

I. ВСТУП

Опис руху електрона на кристалічній ґратці є однією з центральних задач теорії твердого тіла. Така квантова задача зводиться до знаходження розв'язків рівняння Шредингера з деяким модельним, часто періодичним, потенціалом. Загальні властивості розв'язків рівняння Шредингера з періодичним потенціалом описують осциляційною теоремою [1], згідно з якою енергетичний спектр періодичного потенціалу з періодом L має зонну структуру, тобто власні значення належать дозволеним інтервалам (енергетичним зонам) $[E_0, E_1], [E_{1'}, E_2], \dots$. Хвильові функції, які є розв'язками рівняння Шредингера, задовольняють умову

$$\psi(x + L) = e^{ikL}\psi(x), \quad (1)$$

де k є квазіімпульсом. Границі енергетичних зон задаються умовою $kL = \{0, \pi\}$, а хвильові функції, які відповідають граничним значенням енергії, мають властивість $\psi(x + L) = \pm\psi(x)$. Значення енергії на границях зон та відповідні їм хвильові функції часто називають власними значеннями та власними функціями.

Осциляційна теорема стверджує, що для періодичного потенціалу власні функції, які відповідають границям енергетичних зон і впорядковані за зростанням енергії, $E_0 \leq E_1 \leq E_{1'} \leq E_2 \leq E_{2'} \leq E_3 \dots$, є періодичними функціями з періодом $L, 2L, 2L, L, L, 2L, 2L, \dots$. При цьому на інтервалі L такі хвильові функції мають $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$ вузлів відповідно.

На жаль, на сьогодні відомо тільки декілька точних розв'язуваних періодичних потенціалів, тобто потенціалів, для яких можна знайти розв'язки рівняння Шредингера для всіх енергетичних рівнів в аналітичному вигляді. Класичним прикладом періодичного потенціалу, для якого відомі енергетичний спектр та хвильові функції електрона, є потенціал моделі Кроніга–Пенні або його граничний випадок — “гребінець Дірака” [2, 3].

Модель Кроніга–Пенні (МКП) цікава ще й тим, що,

незважаючи на простоту, в її межах можна досліджувати одновимірний неупорядкований ланцюжок як з топологічним безладом, так і з безладом заміщення [4]. Тому вивчення МКП, яка з'явилась ще в 1931 році [5], триває і дотепер [6–12]. Зокрема досліджували енергетичні спектри та динаміку електронів у впорядкованих та неупорядкованих системах [6], явища локалізації [7], властивості надпровідників [8] та явища тунелювання кварків в одновимірних ядерних моделях [9]. Розглядали поведінку релятивістських електронів [10], узагальнену модель Дірака–Кроніга–Пенні [11] та нелінійну модель Кроніга–Пенні [12].

Надалі ми будемо цікавитись розв'язками одновимірного рівняння Шредингера з випадковим потенціалом. Для означення такого потенціалу розіб'ємо дійсну вісь $(-\infty, \infty)$ на інтервали,

$$l_i < x \leq l_{i+1}, \quad (2)$$

і задамо потенціал на кожному з таких інтервалів,

$$V(x) = V^i(x) = V(\alpha_i, x), \quad (3)$$

як функцію випадкової величини α_i , відомої для кожного інтервалу (2). Набір параметрів $\{\alpha_i\}$ є випадковим і відповідає певній конкретній реалізації неупорядкованого потенціалу.

Внесення випадковості в потенціал значно ускладнює знаходження розв'язків задачі про рух електрона в ньому. На жаль, не існує теореми, подібної до осциляційної, яка описує загальні властивості розв'язків рівняння Шредингера з випадковим потенціалом. Можна розрахувати деякі статистичні характеристики випадкових потенціалів [7] та відповідних їм розв'язків рівняння Шредингера, але випадкові потенціали, розв'язки рівняння на власні значення яких можуть бути знайдені в аналітичному вигляді, досі взагалі не відомі.

Незважаючи на неможливість знайти всі розв'язки задачі на власні функції та власні значення, для багатьох потенціалів можна відшукати точний вираз для енергії та хвильових функцій декількох станів.

Така задача відома як квазіточно розв'язувана задача з кількома відомими власними станами. Вона називається квазіточно розв'язуваною (КТР), якщо в аналітичному вигляді можна знайти не всі розв'язки, а лише обмежену кількість енергетичних рівнів та відповідних їм хвильових функцій. Ураховуючи обмежену кількість точно розв'язуваних потенціалів, останнім часом дедалі більшу увагу приділяють квазіточно розв'язуваним потенціалам [13–23].

Потужним засобом вивчення проблеми точної розв'язуваності рівняння Шредингера є суперсиметрична квантова механіка, яку започаткував Віттен [24] (див. огляд суперсиметричної квантової механіки та задач, які можуть бути розв'язані в межах цього формалізму [25]). Зокрема в [18–20] отримано багато КТР потенціалів з використанням методів суперсиметрії.

У статтях [26, 27] запропоновано новий суперсиметричний метод побудови КТР потенціалів з двома відомими розв'язками, які відповідають основному та першому збудженому станам системи. В наступних статтях [28] цей метод узагальнено для отримання КТР потенціалів із довільними двома станами. Далі його розвинули для побудови періодичних [29] та випадкових [30] КТР потенціалів.

У цій праці, яка є продовженням [30], розглянуто особливості побудови одновимірного КТР несингулярного потенціалу Кроніга–Пенні з використанням методу суперсиметрії.

II. СУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА

Гамільтоніан суперсиметричної квантової механіки Віттена має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де гамільтоніани

$$H_{\pm} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) = B^{\mp} B^{\pm} \quad (5)$$

є так званими суперсиметричними партнерами, і

$$B_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + W(x) \right). \quad (6)$$

Тут використано систему одиниць $\hbar = m = 1$. Функція $W(x)$ отримала назву суперпотенціалу. Суперпотенціал $W(x)$ пов'язаний з потенціалом $V_{\pm}(x)$ системи співвідношенням

$$2V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm W'(x). \quad (7)$$

Енергетичний спектр суперсиметричних партнерів H_+ та H_- є ідентичним, за винятком основного стану

$$\begin{aligned} E_{n+1}^- &= E_n^+, \\ E_0^- &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$. Хвильові функції пов'язані суперсиметричним перетворенням

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^-(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_n^+}} B^+ \psi_n^+(x), \\ \psi_n^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^-}} B^- \psi_{n+1}^-(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Легко бачити, що, внаслідок факторизації (5), можна легко знайти розв'язок для стану з нульовою енергією гамільтоніана H_-

$$\begin{aligned} E_0^- &= 0, \\ \psi_0^-(x) &= C_0^- \exp \left(- \int W(x) dx \right), \end{aligned} \quad (10)$$

де C_0^- — константа нормування.

Існує інша лінійно незалежна хвильова функція $\tilde{\psi}(x)$, яка також є розв'язком рівняння Шредингера для цієї енергії:

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) \left(\int \frac{1}{\psi^2(x)} dx + C \right), \quad (11)$$

де C — константа інтегрування. Справді, якщо $\psi(x)$ є розв'язком рівняння Шредингера, то прямою підстановкою (11) в рівняння Шредингера бачимо, що і $\tilde{\psi}(x)$ є його розв'язком.

У цій статті розглянуто задачу про рух електрона у випадковому потенціалі, заданому співвідношеннями (2) та (3). Розв'язками такої задачі, згідно з осциляційною теоремою, є функції, обмежені на всій дійсній осі $(-\infty, \infty)$. Існують різні способи забезпечення обмеженості розв'язків рівняння Шредингера, в цій статті ми обмежимося найпростішою достатньою вимогою

$$\int_{l_i}^{l_{i+1}} W(x) dx = 0. \quad (12)$$

Подібні умови для періодичних потенціалів запропоновано в [16, 17].

III. МОДЕЛЬ З ОДНИМ ВІДОМИМ РОЗВ'ЯЗКОМ

Як було показано в попередній частині, вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$, можна отримати розв'язок для основного стану рівняння Шредингера з потенціалом $V_-(x)$, заданим співвідношенням (7). Найпростіше отримати несингулярний потенціал $V_-(x)$ можна, вибираючи суперпотенціал $W(x)$ регулярною

функцією, однак у цьому випадку можна одержати тільки розв'язки для основного стану. Є інший спосіб забезпечити несингулярність потенціалу $V_-(x)$ з використанням сингулярного суперпотенціалу з певною заданою поведінкою в околі точок сингулярності [28–30].

Нехай суперпотенціал $W(x)$ має такі прості полюси в точках x_k :

$$W(x) = \frac{-1}{x - x_k} + A(x - x_k) + O((x - x_k)^2), \quad (13)$$

де A — деяка константа. Враховуючи зв'язок між суперпотенціалом та потенціалом (7), $V_-(x)$ буде регулярною функцією з такою поведінкою в околі x_k :

$$2V(x) = -3A + O(x - x_k). \quad (14)$$

Хвильова функція (10) в околі точок x_k матиме вигляд

$$\psi_0^-(x) \sim |x - x_k| (1 - A(x - x_k)^2/2). \quad (15)$$

Звернімо увагу на розриви функції $d\psi_0^-(x)/dx$ у точках x_k . Для того, щоб забезпечити неперервність похідної хвильової функції, можна використати той простий факт, що розв'язок рівняння Шредингера визначений з точністю до сталого множника. Тому, вибираючи відповідно знак хвильової функції на кожному з інтервалів (2), можна домогтися неперервності і хвильової функції, і її похідної

$$\psi_0^-(x) \sim (x - x_k) (1 - A(x - x_k)^2/2). \quad (16)$$

Для отримання випадкового потенціалу використаємо генеруючу функцію, означену так:

$$W(x) = W^i(x), \quad (17)$$

де для кожного значення i змінна x належить відповідному інтервалу (2).

Розгляньмо наступний суперпотенціал

$$W(x) = \alpha_i \operatorname{tg}(\alpha_i(x - l_i)), \quad \alpha_i > 0, \quad (18)$$

для кожного значення i змінна x належить відповідному інтервалу (2), де

$$l_{i+1} = l_i + \frac{\pi}{\alpha_i}, l_0 = 0, \quad (19)$$

а α_i — випадкові параметри. Такий суперпотенціал задовольняє умову (12) для кожного з інтервалів (2), а отже, отримані хвильові функції будуть обмеженими на всій дійсній осі. У точках сингулярності $l_i + \pi/2\alpha_i$ суперпотенціал $W(x)$ має характер (13),

причому $A = \alpha_i^2/3$. Тоді

$$V_-(x) = -\frac{\alpha_i^2}{2}. \quad (20)$$

Потенціал $V_-(x)$ відповідає потенціалу неперепорядкованої моделі Кроніґа–Пенні. Можна знайти розв'язок рівняння Шредингера з потенціалом (20) для стану з нульовою енергією

$$\psi_0^-(x) = C_0^- (-1)^i \cos(\alpha_i(x - l_i)). \quad (21)$$

Тут множник $(-1)^i$ забезпечує неперервність хвильової функції та її похідної (див. аналіз (15)–(16)). Після нескладних розрахунків можна отримати інший лінійно незалежний розв'язок (11) рівняння Шредингера

$$\tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_0^- (-1)^i \frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i(x - l_i)), \quad (22)$$

де C_0^- та \tilde{C}_0^- — довільні константи, однакові для всіх інтервалів. Тут вибрано $C = 0$.

Потенціал $V_-(x)$ та хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\tilde{\psi}_0^-(x)$ зображено на рис.1.

Зауважимо, що при зміні випадкової величини α_i змінюється як глибина потенціальної ями $V_-^i = -\alpha_i^2/2$, так і її ширина $\Delta l_i = \pi/\alpha_i$, при цьому добуток

$$V_-^i \Delta l_i^2 = \operatorname{const} \quad (23)$$

залишається сталим. Це є наслідком умови (12), яка забезпечує існування протяжних станів.

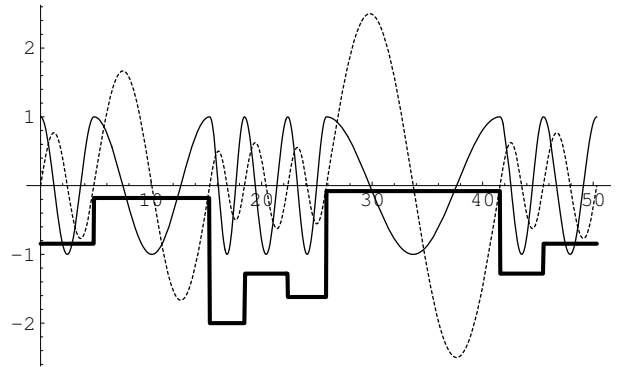


Рис. 1. Хвильові функції, які відповідають власному стану моделі Кроніґа–Пенні з нульовим рівнем енергії для $i = 0 \dots 7$, $\alpha_i = \{1.3, 0.6, 2, 1.6, 1.8, 0.4, 1.6, 1.3\}$. Жирною лінією позначено випадковий потенціал $V_-(x)$, суцільною лінією відповідає $\psi_0^-(x)$, пунктирна — $\tilde{\psi}_0^-(x)$. Константи нормування C_0^- та \tilde{C}_0^- вибрані рівними одиниці.

IV. МОДЕЛЬ З ДВОМА ВІДОМИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Для отримання ще одного власного стану H_- використаємо відому процедуру знаходження спектра суперсиметричних партнерів H_+ та H_- (5). Якщо ми знаємо певний стан H_+ , то можемо одразу знайти новий стан H_- , використовуючи суперсиметричні перетворення (9). Перепишемо гамільтоніан H_+ у такій формі:

$$H_+ = H_-^{(1)} + \epsilon = B_1^+ B_1^- + \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad (24)$$

де B_1^\pm задані співвідношеннями (6) з новим суперпотенціалом $W_1(x)$. Тоді

$$W^2(x) + W'(x) = W_1^2(x) - W_1'(x) + 2\epsilon. \quad (25)$$

Із (24) виходить, що хвильова функція H_+ з енергією $E = \epsilon$ є також хвильовою функцією, яка відповідає станові з нульовою енергією гамільтоніана $H_-^{(1)}$ і задовольняє рівняння $B_1^-(x)\psi_\epsilon^+(x) = 0$,

$$\psi_\epsilon^+(x) = C_\epsilon^+ \exp\left(-\int W_1(x) dx\right). \quad (26)$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (9) до $\psi_\epsilon^+(x)$, ми отримаємо хвильову функцію збудженого стану з енергією $E = \epsilon$ для гамільтоніана H_-

$$\psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon^- W_+(x) \exp\left(-\int W_1(x) dx\right), \quad (27)$$

де введено позначення $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

Умова (25) є рівнянням Рікати, яке не може бути розв'язане стосовно до $W(x)$ для заданого $W_1(x)$ і навпаки.

Незважаючи на це, можна знайти таку пару функцій $W(x)$ та $W_1(x)$, яка задовольняє рівняння (25). Для цього перепишемо його в такому вигляді:

$$W_+'(x) = W_-(x)W_+(x) + 2\epsilon, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Таке нове рівняння можна розв'язати щодо $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$ і навпаки. Надалі ми будемо використовувати розв'язок, виражений через $W_+(x)$

$$W(x) = \frac{1}{2}\left(W_+(x) - \frac{W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\right),$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\left(W_+(x) + \frac{W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\right). \quad (30)$$

Вимога несингулярності потенціалу $V_-(x)$ накладає обмеження на генеруючу функцію $W_+(x)$. Детальний аналіз цього питання проведено в [28].

Розглянемо спочатку $W_+(x)$, яка має прості нулі в точках x_k . Умова несингулярності $V_-(x)$ в цьому випадку приводить до умови $|W_+'(x)| = 2\epsilon$. Зручно розбити множину x_k на два набори x_k^+ та x_k^- , для яких $W_+'(x_k^+) = 2\epsilon > 0$ та $W_+'(x_k^-) = -2\epsilon < 0$. Тоді суперпотенціали будуть мати прості полюси в точках x_k^-

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{-1}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-), \\ W_1(x) &= \frac{1}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-). \end{aligned} \quad (31)$$

Розглянемо тепер функцію $W_+(x)$, яка має сингулярності в точках a_k та b_k із такою поведінкою:

- нехай функція $W_+(x)$ має такі прості полюси в точках a_k :

$$W_+(x) = \frac{-1}{x - a_k} + \text{const}. \quad (32)$$

У цьому випадку суперпотенціал $W(x)$ не буде мати полюсів у точках a_k , а суперпотенціал $W_1(x)$ матиме полюси з поведінкою

$$W_1(x) = \frac{-1}{x - a_k} + O(x - a_k). \quad (33)$$

- нехай функція $W_+(x)$ має такі прості полюси в точках b_k :

$$W_+(x) = \frac{-3}{x - b_k} + O(x - b_k). \quad (34)$$

Тоді суперпотенціали матимуть полюси в околі b_k з поведінкою

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{-1}{x - b_k} + O(x - b_k), \\ W_1(x) &= \frac{-2}{x - b_k} + O(x - b_k). \end{aligned} \quad (35)$$

Зауважимо, що існування у функції $W_+(x)$ сингулярностей із іншою поведінкою приведе до сингулярного потенціалу $V_-(x)$.

Отже, функція $W_+(x)$, яка має перелічені вище властивості, генерує несингулярний квазіточно розв'язуваний потенціал $V_-(x)$, як показано в (7), де суперпотенціал $W(x)$ виражений через функцію $W_+(x)$, пов'язану із суперпотенціалом співвідношенням (30).

Хвильова функція для стану з нульовою енергією $\psi_0^-(x)$ та хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ для стану з енергією ϵ задані виразами (10) та (26) відповідно, причому хвильова функція $\psi_0^-(x)$ матиме вузли в точках x_k^- та b_k , а хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ — вузли в точках x_k^+ та b_k .

Для отримання випадкового потенціалу використаємо генеруючу функцію, означену так:

$$W_+(x) = W_+^i(x), \quad (36)$$

де для кожного значення i змінна x належить інтервалові (2).

Розгляньмо наступну генеруючу функцію

$$W_+^i(x) = \frac{1}{\beta_i} \tan\left(\beta_i(x - l_i)\right), \quad (37)$$

де границі інтервалів (2) задані співвідношенням

$$l_{i+1} = l_i + \frac{\pi}{\beta_i}, \quad l_0 = 0, \quad (38)$$

а β_i — випадкові параметри.

Така генеруюча функція задовольняє умову (12), а значить, отримані хвильові функції будуть обмеженими на всій дійсній осі. Функція (37) задовольняє також умову $|W_+'(x)| = |W_+'(x_k^+ = l_k)| = 1 = 2\epsilon$, тому енергія збудженого стану $\epsilon = 1/2$.

Щоб задовольнити умови (32) та (34), параметри β_i мають приймати значення 1 або $1/\sqrt{3}$ відповідно, тому можна виразити величини β_i через нові параметри n_i , які випадково приймають значення 0 або 1

$$\beta_i = 1 - n_i + n_i \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (39)$$

Тоді

$$W_+(x) = (1 - n_i) \operatorname{tg}(x - l_i) + n_i \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right). \quad (40)$$

Така функція генерує суперпотенціали

$$W(x) = n_i \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right), \quad (41)$$

$$W_1(x) = (1 - n_i) \operatorname{tg}(x - l_i) + n_i \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right),$$

і потенціальну енергію

$$V_-(x) = -\frac{n_i}{6}, \quad (42)$$

де для кожного значення i змінна x відповідає інтервалові (2).

Потенціал $V_-(x)$ відповідає потенціалові невпорядкованої моделі Кроніга–Пенні. Для цього КТР потенціалу можна знайти в аналітичному вигляді хвильові функції, які відповідають рівням енергії 0 та ϵ відповідно

$$\psi_0^-(x) = C_0^- (-1)^{\sum_{j=0}^{i-1} n_j} \left((1 - n_i) + n_i \cos\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right) \right), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon^- (-1)^{\sum_{j=0}^{i-1} (1 - n_j)} & \left((1 - n_i) \sin(x - l_i) \right. \\ & \left. + n_i \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2(x - l_i)}{\sqrt{3}}\right) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

тут множники виду $(-1)^{f(\{n_i\})}$ забезпечують неперервність хвильових функцій та їх похідних.

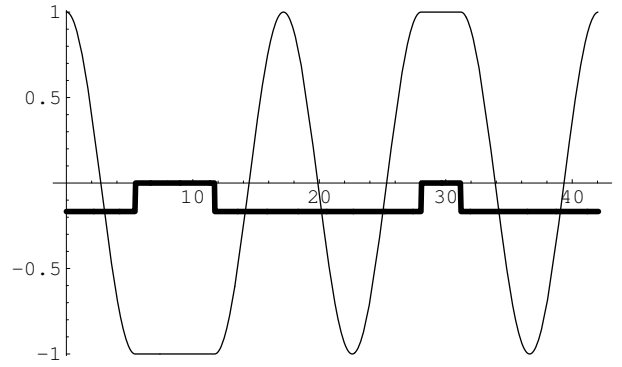


Рис. 2. Хвильова функція $\psi_0^-(x)$, яка відповідає власному стану моделі Кроніга–Пенні з нульовим рівнем енергії для $i = 0 \dots 8$, $n_i = \{1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1\}$. Жирною лінією наведено потенціал $V_-(x)$. Константа нормування C_0^- вибрана рівною одиниці.

Тут C_0^- та \tilde{C}_ϵ^- — довільні константи, однакові для всіх інтервалів.

Використовуючи формулу (11), можна знайти іншу пару лінійно незалежних розв'язків $\tilde{\psi}_0^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ для заданих $\tilde{\psi}_0^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_i^- & \left((1 - n_i)(x + C_i) \right. \\ & \left. + n_i \left[C_i \cos\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{x - l_i}{\sqrt{3}}\right) \right] \right), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\epsilon^-(x) = \tilde{C}_i^- & \left(- (1 - n_i) \cos(x - l_i) \right. \\ & \left. - n_i \cos\left(\frac{2(x - l_i)}{\sqrt{3}}\right) \right), \end{aligned} \quad (46)$$

де константи \tilde{C}_i та C_i підбираються так, щоби забезпечити неперервність хвильової функції та її похідної в точках зшивання. Однак розв'язок $\tilde{\psi}_0^-(x)$, будучи розв'язком рівняння Шредингера, не має фізичного змісту, оскільки хвильова функція (45) є лінійною функцією x для інтервалів з $n_i = 0$, що веде до розбігання її при x , що прямує до ∞ або $-\infty$. Отже, власний стан з нульовою енергією є невиродженим, а стан з енергією ϵ двократно вироджений із хвильовими функціями (44) та (46).

Потенціал $V_-(x)$, хвильова функція $\psi_0^-(x)$ власного стану з нульовим рівнем енергії і хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ власного стану з енергією ϵ зображені на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

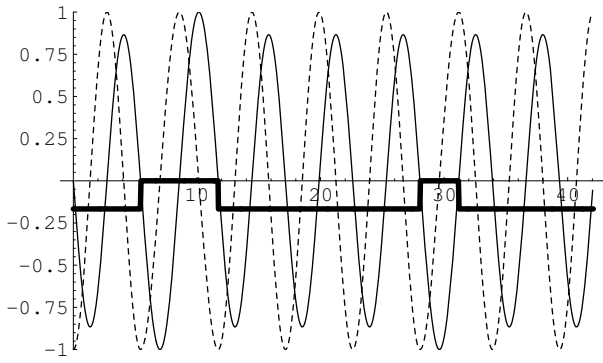


Рис. 3. Хвильові функції, які відповідають власному станові моделі Кроніга–Пенні з рівнем енергії ϵ для $i = 0 \dots 8$, $n_i = \{1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1\}$. Жирною лінією позначено потенціал $V_-(x)$, суцільна лінія відповідає $\psi_0^-(x)$, пунктирна — $\psi_\epsilon^-(x)$. Константи нормування C_ϵ^- та \tilde{C}_ϵ^- вибрані рівними одиниці.

Зауважимо, що при зміні випадкового параметра n_i змінюється тільки величина $\Delta l_i = \sqrt{3}\pi/(n_i + \sqrt{3}(1 - n_i))$, яка може набувати значень

$$\Delta l_a = \pi, \quad \Delta l_b = \sqrt{3}\pi. \quad (47)$$

Тоді ширина ями повинна бути кратною $\sqrt{3}\pi$, а відстань між ямами — кратною π . Ці співвідношення, які забезпечують існування протяжних станів, як і в попередньому розділі, є наслідком умови (12).

V. ВИСНОВКИ

У цій статті отримано розв'язки рівняння Шредингера з випадковими потенціалами Кроніга–Пенні (20) та (42).

Для потенціалу (20) в явному вигляді знайдено дві власні функції з нульовою енергією. Отже, цей енергетичний рівень є двократно виродженим. Для потенціалу (42) в явному вигляді знайдено власні функції для двох енергій $E = 0$ та $E = \epsilon$. Стан з нульовою енергією є невиродженим, а стан з енергією ϵ двократно вироджений. Зауважимо, що стан з енергією $E = 0$ в потенціалах (20) та (42) не є основним станом цих потенціалів, про що свідчить наявність вузлів у відповідних хвильових функціях.

У випадку, коли $\alpha_i = \{\alpha_a, \alpha_b, \alpha_a, \alpha_b, \dots\}$ та $n_i = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$, потенціали (20) та (42) відповідно переходять у потенціал періодичної моделі Кроніга–Пенні. Для аналізу отриманих розв'язків рівняння Шредингера з періодичним потенціалом можна застосувати осциляційну теорему, згідно з якою у випадку КТР потенціалу з одним відомим розв'язком (20) отриманий розв'язок відповідає верхньому краю четвертої зони або нижньому краю п'ятої, якщо нумерація енергетичних зон починається з одиниці. Для КТР потенціалу з двома відомими розв'язками (42) отриманий розв'язок $E = 0$ відповідає верхньому краю першої зони або нижньому краю другої, а розв'язок $E = \epsilon$ — верхньому краю третьої зони або нижньому краю четвертої.

У праці [31] суперсиметричний метод узагальнено для отримання КТР потенціалів з трьома відомими власними станами. За допомогою цього методу можна одержати й періодичні КТР потенціали. Однак на сьогодні невідомо, чи можна використати його для неупорядкованої моделі Кроніга–Пенні.

Зазначимо також, що генеруючі функції $W(x)$ (18) та $W_+(x)$ (37) з умовою (12) забезпечують знаходження тільки протяжних розв'язків для отриманих потенціалів. Цікавим результатом є умови (23) та (47) на параметри випадкового потенціалу, при яких у системі наявні протяжні стани. Добре відомо, що в одновимірних випадкових потенціалах можуть існувати локалізовані розв'язки. Можливість одержання таких розв'язків за допомогою наведеної вище техніки буде докладно проаналізовано в наступних роботах.

[1] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's equation* (Winkley, New York, 1966).
 [2] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике* (Мир, Москва, 1974).
 [3] В. Ульянов, *Задачи по квантовой механике и квантовой статистике* (Вища школа, Харків, 1980).
 [4] Дж. Займан, *Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем* (Мир, Москва, 1982).

[5] R. de L. Kronig, W. G. Penney, *Proc. Roy. Soc.* **130**, 499 (1931).
 [6] E. Lieb, D. C. Mattis, *Mathematical physics in one dimension* (Academic Press, New York, 1966).
 [7] A. D. Mirlin, *Phys. Rep.* **326**, 259 (2000).
 [8] Y. Tanaka, M. Tsukada, *Phys. Rev. B* **40**, 4482 (1989).
 [9] G. J. Clerk, B. H. J. McKellar, *Phys. Rev. C* **41**, 1198 (1990).
 [10] F. Dominguez-Adame, E. Macia, Arif Khan, C. L. Roy,

- Physica B **212**, 67 (1995).
- [11] F. Dominguez-Adame, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 109 (1989).
- [12] S. Theodorakis, E. Leontidis, e-print cond-mat/9708035 (1997).
- [13] A. V. Turbiner, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 33 (1988).
- [14] A. V. Turbiner, J. Phys. A **22**, L1 (1989).
- [15] Y. Brihaye, M. Godart, J. Math. Phys. **34**, 5283 (1993).
- [16] G. Dunne, J. Feinberg, Phys. Rev. D **57**, 1271 (1998).
- [17] G. Dunne, J. Mannix, Phys. Lett. B **428**, 115 (1998).
- [18] A. Khare, U. Sukhatme, J. Math. Phys. **40**, 5473 (1999).
- [19] U. Sukhatme, A. Khare, e-print quant-ph/9902072 (1999).
- [20] A. Khare, U. Sukhatme, J. Math. Phys. **42**, 5652 (2001); e-print quant-ph/0105044 (2001).
- [21] D. J. Fernandez C., J. Negro, L. M. Nieto, Phys. Lett. A **275**, 338 (2000).
- [22] A. Khare, Phys. Lett. A **69**, 2888 (2001), quant-ph/0105030 (2001).
- [23] A. Ganguly, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1932 (2000).
- [24] Witten. E, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).
- [25] F. Cooper *et al.*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [26] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
- [27] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 1291 (1999).
- [28] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001).
- [29] V. M. Tkachuk, O. Voznyak, J. Phys. Stud. **6**, 40 (2002).
- [30] V. M. Tkachuk, O. Voznyak, Phys. Lett. A **301**, 177 (2002).
- [31] T. V. Kuliyy, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 2157 (1999).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE DISORDERED KRONIG–PENNEY MODEL

O. Voznyak, V. M. Tkachuk

*Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12 Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine*

Using the supersymmetric quantum mechanics the quasi-exactly solvable random Kronig–Penney potentials with one and two known eigenstates are constructed. The obtained eigenfunctions belong to extended states of the particle moving in these potentials.